TD 3 - Actions de groupes

Notions du cours.

- Groupes topologiques.
- Actions de groupes.

Groupes topologiques.

On rappelle la définition de certains groupes de matrices.

- Le *groupe général linéaire* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Le *groupe orthogonal* $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = AA^T = I\}$.
- Le *groupe orthogonal spécial* $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}$.
- Le *groupe unitaire* $\mathrm{U}(n) = \mathrm{U}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^\dagger A = AA^\dagger = I\}$.
- Le *groupe unitaire spécial* $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{SU}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\}$.

Exercice 1. Décrire les composantes connexes de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$.

Exercice 2. Montrer que l'espace $\mathbb{RP}^3$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(3)$.
Indication : utiliser l'homéomorphisme $\mathbb{RP}^3 \cong B^3/\mathcal{R}$, où B^3 est la boule unitaire fermée dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{R}$ est la relation antipodale sur son bord $\partial B^3 \cong \mathbb{S}^2$, et donner une application $B^3 \to \mathrm{SO}(3)$ compatible avec $\mathcal{R}$.

Exercice 3. L'espace unitaire tangent à une sphère $\mathbb{S}^n$, noté $T(\mathbb{S}^n)$, est le sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ formé des couples (x, y) avec $x \in \mathbb{S}^n$ et y de norme 1, orthogonal à x. Montrer que $T(\mathbb{S}^2)$ est homéomorphe à $\mathbb{RP}^3$.

Actions de groupes.

Exercice 4. Soit G un groupe topologique (qu'on peut supposer séparé) et H un sous-groupe de G.

(a) Montrer que l'espace des orbites G/H est séparé si, et seulement si, H est fermé dans G.

(b) Si H est un sous-groupe distingué de G, l'ensemble quotient G/H est un groupe pour la loi $[g] \cdot [g'] := [g \cdot g']$, l'inverse d'un élément étant donné par $[g]^{-1} := [g^{-1}]$. Montrer que, muni de ces lois, G/H est un groupe topologique.

Exercice 5. Soit G un groupe topologique séparé et H un sous-groupe *discret* de G (i.e. H muni de la topologie induite est un espace topologique discret). Notons $q : G \to G/H$ la surjection canonique.

(a) Exhiber deux voisinages W et V de e dans G tels que $W \cap H = \{e\}$, $V = V^{-1}$ et $V \cdot V^{-1} \subseteq W$. Montrer que les parties $(hV)_{h \in H}$ de G sont disjointes deux à deux.

(b) Montrer que H est un fermé de G. En déduire que G/H est séparé.

(c) Supposons H distingué dans G. Si l'espace topologique G est connexe, montrer que tout élément de H commute avec tout élément de G. En déduire que H est commutatif.

(d) Supposons H distingué dans G. Montrer que la classe $[e] \in G/H$ admet un voisinage U tel que $q^{-1}(U) = \cup_i U_i$ où les parties U_i sont disjointes deux à deux et la restriction de la surjection canonique $q|_{U_i} : U_i \to U$ est un homéomorphisme pour tout i. En déduire qu'il en est de même pour tout $[g] \in G/H$.

Exercice 6.

(a) Montrer que pour $n \geq 1$, le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ agit transitivement sur $\mathbb{S}^{n-1}$. En déduire un homéomorphisme

$$\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) \cong \mathbb{S}^{n-1}$$

où $\mathrm{O}(n-1)$ est identifié à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ par l'application qui à $M \in \mathrm{O}(n-1)$ associe la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ de $\mathrm{O}(n)$.

Montrer de même l'existence des homéomorphismes

(b) $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \cong \mathbb{S}^{n-1}$ pour $n \geq 2$,

(c) $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1) \cong \mathbb{S}^{2n-1}$ pour $n \geq 1$,

(d) $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) \cong \mathbb{S}^{2n-1}$ pour $n \geq 2$.

Exercice 7. Pour $n \geq k$ entiers positifs, la variété de Stiefel réelle $V_{k,n}(\mathbb{R})$ est donnée par

$$V_{k,n}(\mathbb{R}) = \{(a_1, \ldots, a_k) | a_i \in \mathbb{R}^n, < a_i, a_j >= \delta_{i,j}\}.$$

(a) Montrer que pour $n \geq k$ le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$ agit transitivement sur $V_{k,n}(\mathbb{R})$. En déduire un homéomorphisme

$$\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-k) \cong V_{k,n}(\mathbb{R}),$$

où $\mathrm{O}(n-k)$ est identifié à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ par l'application qui à $M \in \mathrm{O}(n-k)$ associe la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ de $\mathrm{O}(n)$.

Montrer de même l'existence des homéomorphismes

(b) $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-k) \cong V_{k,n}(\mathbb{R})$ pour $n > k$,

(c) $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-k) \cong V_{k,n}(\mathbb{C})$ pour $n \geq k$,

(d) $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-k) \cong V_{k,n}(\mathbb{C})$ pour $n > k$.

Exercice 8. On note $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$ (pour $0 \leq k \leq n$). La *variété de Grassmann réelle* ou la *grassmannienne réelle* est l'espace $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ muni de la topologie quotient induite par l'application surjective $\rho : V_{k,n}(\mathbb{R}) \to Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ associant à un repère $(a_1, \ldots, a_k)$ le sous-espace engendré par ce repère.

(a) Montrer que l'espace topologique $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ est séparé.

Indication : pour $a \in \mathbb{R}^n$, considérer l'application $d_a : V_{k,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui associe à un repère $(v_1, \cdots, v_k)$ le carré de la distance de a au sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(v_1, \cdots, v_k)$.

(b) Montrer qu'il existe un homéomorphisme

$$Gr_{k,n}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k))$$

où $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$ est identifié à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ par l'application qui à $(A, B) \in \mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$ associe la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ de $\mathrm{O}(n)$.

(De façon analogue, on pourra définir la *grassmannienne complexe* $Gr_{k,n}(\mathbb{C})$, et montrer qu'elle est séparée, et que $Gr_{k,n}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{U}(n)/(\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k))$.)

Exercice 9.

(a) Montrer que l'application qui associe à un espace vectoriel son orthogonal induit un homéomorphisme entre $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$ et $Gr_{n-k,n}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer la propriété analogue pour les grassmanniennes complexes.